

TOEPASSINGEN VAN HOGERE AFGELEIDEN

TOEN IK ENIGE TIJD GELEDEN IN HET VIJFDE JAAR DE LESSEN OVER EERSTE EN TWEEDE AFGELEIDE EN HUN BETEKENIS GAF, KWAM DE VRAAG VAN MIJN LEERLINGEN: 'BESTAAT ER OOK EEN DERDE AFGELEIDE EN WAT BETEKENIT DIE DAN?' IK KON UITERAARD VERTELLEN DAT JE DE AFGELEIDE VAN EEN TWEEDE AFGELEIDE KUNT NEMEN OM EEN DERDE AFGELEIDE TE BEKOMEN. WAT BETREFT DE BETEKENIS EN DE TOEPASSINGEN KWAM IK NIET VEEL VERDER DAN DE MECHANICA CONTEXT: DE AFGELEIDE VAN DE VERSNELLING IS DE OGENBLIKKELIJKE VERANDERING VAN DE VERSNELLING. DAAR HAD IK OOIIT IETS OVER GELEZEN IN VERBAND MET TREINEN DIE AL HORTEND EN STOTEND OP GANG KWAMEN. DEZE VRAAG EN MIJN EIGEN NIEUWSGIERIGHEID ZIJN DE AANLEIDING GEWEEST VOOR WAT MEER OPZOEKWERK OVER DIT ONDERWERP. HET RESULTAAT WIL IK GRAAG MET JULLIE UITWISKELEN.

GERD HAUTEKIET - REDACTIE UITWISKELING



1. GRAFISCHE BETEKENIS VAN DERDE AFGELEIDE

De eerste afgeleide in een bepaald punt is de helling van de raaklijn en uit het teken kun je dus afleiden of de functie er stijgt of daalt.

De tweede afgeleide zegt hoe de eerste afgeleide verandert en hieruit kun je afleiden of de functiegrafiek er hol of bol is.

De derde afgeleide zegt hoe de tweede afgeleide verandert. Die is niet meer zomaar op zicht te interpreteren via het gedrag van een grafiek in een bepaald punt. Men heeft hiervoor het begrip 'aberrancy' gedefinieerd. Maar dat blijkt vrij ingewikkeld te zijn en daarom ga ik hier niet verder op in.

2. JERK EN SNAP

We zijn goed vertrouwd met de begrippen verplaatsing, snelheid en versnelling. Ons lichaam voelt geen snelheid, maar wel verandering van snelheid of versnelling. Denk maar aan een passagier in een auto die constant versnelt. Hij zal een constante kracht voelen van de zetel op zijn rug. We zijn vertrouwd met de constante gravitatieversnelling. Maar ongeveer alle andere versnellingen die we dagelijks ondergaan, zijn niet constant: bij autorijden of het nemen van een lift wordt ons lichaam blootgesteld aan krachten die ons een versnelling geven. Het menselijk lichaam kan verregaande effecten ondervinden bij de verandering in beweging. Denk bijvoorbeeld aan een whiplash na een aanrijding, het op gang komen van een auto bij een eerste rijles, het daveren of schokken van tram of trein, een bus die plots remt... Bij de meeste transportmiddelen zal men dan ook proberen de veranderingen in versnelling of kracht zo comfortabel of geleidelijk mogelijk te laten verlopen. Maar bij trampolines of bij rollercoasters in pretparken is het juist de bedoeling het lichaam grote veranderingen in soorten bewegingen te laten maken.

De verandering van versnelling wordt 'jerk' genoemd, van het werkwoord 'to jerk', rukken. Denk aan een plotse ruk aan een touw. De jerk is de derde afgeleide van de plaatsvector naar de tijd en heeft zeer belangrijke toepassingen in de mechanica. Een verandering in jerk, vierde afgeleide van de plaats naar de tijd, wordt 'snap' of 'jounce' genoemd, van het werkwoord 'to snap', dat happen betekent. Denk aan een hond die in je enkels wil bijten! De vijfde en zesde afgeleide worden respectievelijk 'crackle' en 'pop' genoemd.

Snelheid zet je meestal niet aan of uit maar ze wordt opgebouwd van nul. Er is dus een versnelling. Zo ook wordt de versnelling niet aangezet maar ze wordt ook opgebouwd van waarde nul. Dus moet er jerk zijn. Die wordt ook niet plots aangezet maar opgebouwd vanaf nul. Dus moet er snap zijn... De termen jerk en snap zijn niet echt bekend, zelfs niet bij fysici en ingenieurs. Jerk is telkens te voelen als een verandering in kracht, als een toenemende of afnemende kracht op je lichaam werkt.

In een auto kun je het effect van snelheid, versnelling, jerk en snap goed voelen. Een ervaren chauffeur zal zachtjes

versnellen, een beginnende chauffeur zal meer 'jerky' rijden. Zeker bij het met de hand schakelen naar een andere versnelling zal de wagen dikwijls met horten en stoten rijden, het gevolg van jerk en snap. Denk ook aan hoe (hogesnelheids)treinen op snelheid komen en weer vaart minderen bij het naderen van hun bestemming; meestal gebeurt dit 'smoothly', maar soms gaat het gepaard met hevige schokken.

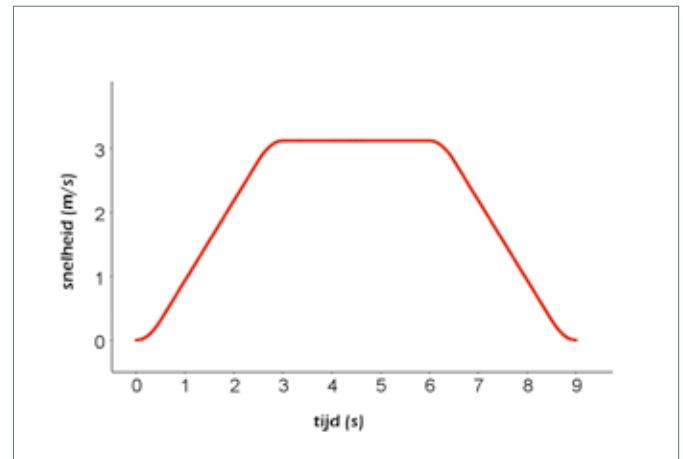
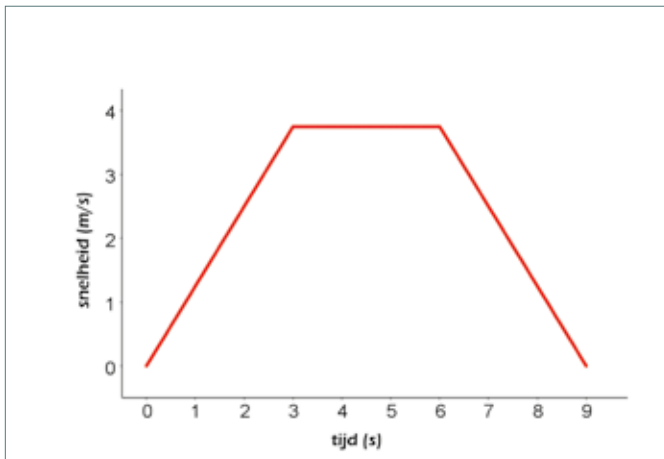
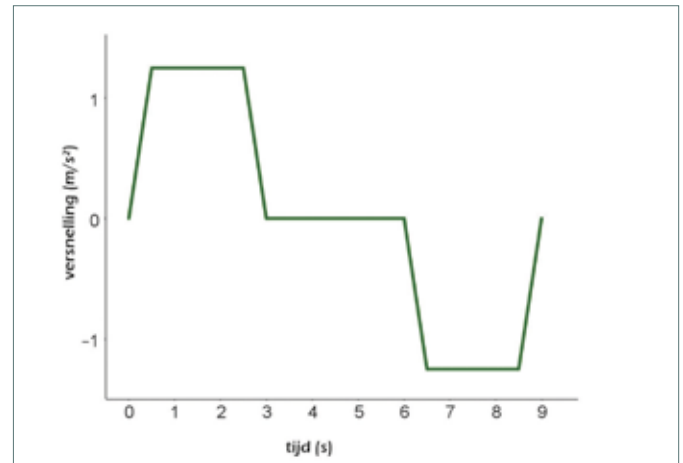
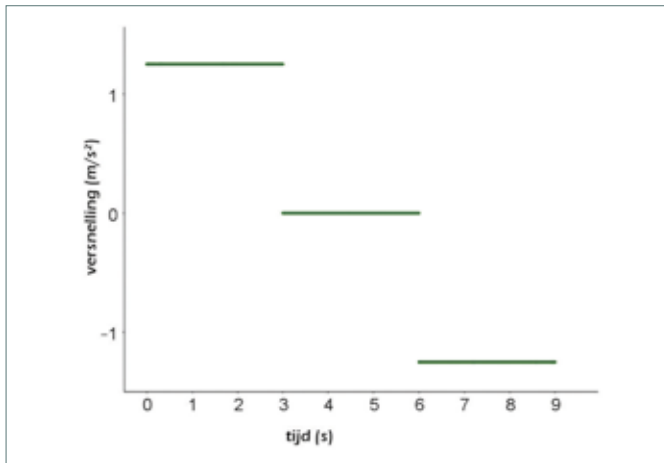
Ook bij andere toepassingen moet er rekening gehouden worden met jerk en snap. Bij het opstarten en uitzetten van machines, bij het opstijgen en landen van vliegtuigen of drones, bij versnellen en vertragen. Ook trillingen gaan altijd gepaard met jerk en snap. Een constante kracht of versnelling kan immers geen trilling veroorzaken. Een frezer kan zijn frees en/of zijn werkstuk verknoeien als de installatie begint te trillen als gevolg van jerk en snap. Ik bespreek enkele voorbeelden waarbij jerk een belangrijke rol speelt.

3. MODEL VAN EEN LIFT

We vonden een mooi uitgewerkte lessenreeks bij Lauwers (2013) over liften in grote flatgebouwen. Het hoogste gebouw ter wereld is momenteel de Burj Khalifa in Dubai. Met een hoogte van 828 m is het belangrijk dat liften snel en efficiënt grote hoogten kunnen overbruggen. De topsnelheid van een lift bedraagt momenteel 18 m/s of ongeveer 65 km/h. Voor zwangere vrouwen blijkt een versnelling van $1,25 \text{ m/s}^2$ en een jerk van $2,50 \text{ m/s}^3$ het maximale te zijn dat medisch verantwoord is.

Je kunt je afvragen hoe een liftraject eruitziet en hoelang het duurt om boven te raken. Het materiaal uit de lessenreeks kan zelfstandig door leerlingen opgelost worden. Er wordt eerst gevraagd uit te rekenen hoelang een lift erover zou doen als hij met de maximumsnelheid van 18 m/s heel het traject zou afleggen. Dit is natuurlijk geen realistische situatie: de lift staat eerst stil en moet dan versnellen tot zijn maximale snelheid.

Een eerste model (zie figuur 1) gaat uit van een constante versnelling van $1,25 \text{ m/s}^2$ bij het versnellen en $-1,25 \text{ m/s}^2$ bij het vertragen. Tussentijd blijft de lift met zijn maximale snelheid bewegen. Eerst worden er enkele vragen gesteld over het verband tussen de versnellingsgrafiek (bovenaan) en de snelheidsgrafiek (onderaan).



Figuur 1 Model 1 voor de lift zonder jerk

Figuur 2 Model 2 voor de lift met jerk

Dit moet volstaan om het onderstaande probleem op te lossen. Bekijk het volgende model: de maximale snelheid van de lift is 18 m/s en de versnelling is precies $1,25 \text{ m/s}^2$. De lift gaat zonder stoppen, in één keer van het gelijkvloers naar de hoogte van $565,4 \text{ m}$. We onderscheiden drie fasen:

Fase 1: de snelheid neemt lineair toe van 0 m/s tot 18 m/s , bij een constante versnelling van $1,25 \text{ m/s}^2$.

Fase 2: de snelheid blijft zo lang mogelijk constant 18 m/s .

Fase 3: de snelheid neemt lineair af van 18 m/s tot 0 m/s , bij een constante versnelling van $-1,25 \text{ m/s}^2$, totdat de snelheid op $565,4 \text{ m}$ weer 0 m/s is.

Bereken hoelang elke fase duurt.

De berekening kan gebeuren door eerst de oppervlakte te berekenen onder de snelheidsgrafiek bij het versnellen en vertragen. Dan kan berekend worden hoelang de lift op zijn maximale snelheid moet bewegen.

Vervolgens wordt het model uitgebreid omdat de versnelling niet abrupt mag beginnen of stoppen. Dat is immers niet comfortabel en ronduit slecht voor zwangere vrouwen. De versnelling moet rustig op- of afgebouwd worden. En hier komt de jerk tevoorschijn.

We bekijken een model (zie figuur 2) waarbij de versnelling lineair stijgt tot haar maximale waarde, ze blijft op haar maximale waarde, en neemt daarna lineair af tot 0 m/s^2 .

Dan is de snelheid maximaal en dit blijft zo gedurende enige tijd. Daarna vindt eenzelfde soort proces plaats maar dan omgekeerd om de snelheid weer tot 0 m/s te brengen. Het is opnieuw de bedoeling om voor elke fase te berekenen hoelang ze duurt en hoe de snelheid en de hoogte veranderen.

Bekijk het volgende model: de maximale snelheid van de lift is 18 m/s, de maximale versnelling is $1,25 \text{ m/s}^2$ en de jerk is $2,50 \text{ m/s}^3$. De lift gaat zonder stoppen, in één keer van het gelijkvloers naar de hoogte van 565,4 m. We onderscheiden nu zeven fasen:

Fase 1: de versnelling neemt lineair toe van 0 m/s^2 tot $1,25 \text{ m/s}^2$, bij een constante jerk van $2,50 \text{ m/s}^3$.

Fase 2: de versnelling is constant $2,50 \text{ m/s}^2$, de jerk is 0 m/s^3 , de snelheid neemt lineair toe.

Fase 3: de versnelling neemt lineair af van $1,25 \text{ m/s}^2$ tot 0 m/s^2 , bij een constante jerk van $-2,50 \text{ m/s}^3$.

Fase 4: de versnelling en jerk zijn $0 \text{ (m/s}^2 \text{ en m/s}^3)$, de snelheid is constant 18 m/s.

Fase 5: de negatieve versnelling neemt lineair 'toe' van 0 m/s^2 tot $-1,25 \text{ m/s}^2$, bij een constante jerk van $-2,50 \text{ m/s}^3$.

Fase 6: de versnelling is constant $-1,25 \text{ m/s}^2$, de jerk is 0 m/s^3 , de snelheid neemt lineair af.

Fase 7: de negatieve versnelling neemt lineair 'af' van $-1,25 \text{ m/s}^2$ tot 0 m/s^2 , bij een constante jerk van $2,50 \text{ m/s}^3$.

Bereken voor elke fase de duur en de snelheid en de hoogte van de lift.

4. ACHTBANEN, ROLLERCOASTER

Bij de attracties in pretparken is het belangrijk dat men veel sensatie voelt: daarom wordt de versnelling opgevoerd. Zowel de grootte, de duur als de snelheid waarmee dit gebeurt, moeten op gecontroleerde wijze plaatsvinden zodat het veilig blijft voor de gebruikers. De biomechanische effecten van sterke versnellingen zijn niet altijd plezierig: ze kunnen minder leuke ervaringen opleveren maar ook gevaarlijk zijn voor de gezondheid. Uit experimenten (meestal voor militaire doeleinden) is gebleken welke de maximaal toegestane versnelling is. Zo is bij een lancering van een ruimtetuig een constante lineaire versnelling van $2,5 \cdot g$ gedurende 12 s toegelaten maar een constante lineaire versnelling van $5 \cdot g$ mag maar 1,5 s

duren. Bij rollercoasters komen zulke lange periodes van constante versnelling niet voor. Maar als je in een carroussel zit die draait met een constante hoeksnelheid, met je gezicht gericht naar het middelpunt, komen ook zulke versnellingen voor.

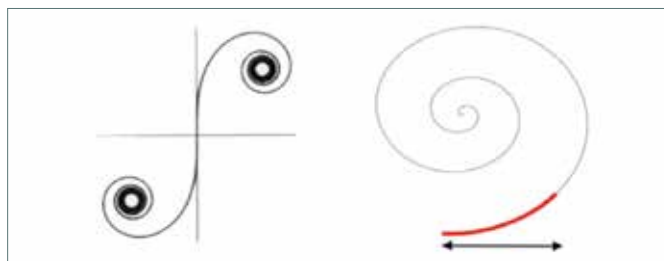
Rollercoasters zijn complexe systemen met combinaties van hellingen, loopings en schroefbewegingen. Het is aan de ingenieurs om te zorgen dat alle versnellingen in de verschillende dimensies binnen de grenzen van het toelaatbare blijven.

5. DESIGN VAN BOCHTEN IN SNELWEGEN EN SPOORBANEN

De overgangsboog van een rechtlijnige (spoor)baan naar een bocht verloopt het best volgens een deel van de clothoïde of spiraal van Cornu. De kromtestraal wordt geleidelijk aan kleiner (of groter) als je met een constante snelheid over de clothoïde rijdt (zie figuur 3).

In dat geval is de verandering in versnelling niet abrupt en zijn de hoeveelheid jerk en snap in grote mate gereduceerd. Als de overgang tussen verschillende kromtestralen van een bocht te snel gebeurt, heeft dit vervelende gevolgen voor de passagiers en kan er zelfs toe leiden dat de trein uit de bocht vliegt of ontspoord.

Ingenieurs zullen daarom proberen te zorgen voor een lineair veranderende jerk en constante snap. Dit geeft dan een zachte toename van de normale versnelling. Nog beter is een zero snap en constante jerk. Dit betekent dat bij het doorlopen van een bocht een automobilist met constante hoeksnelheid het stuur kan verdraaien. De toename van de kromming per tijdseenheid is gelijk als je met een constante snelheid door de bocht rijdt.

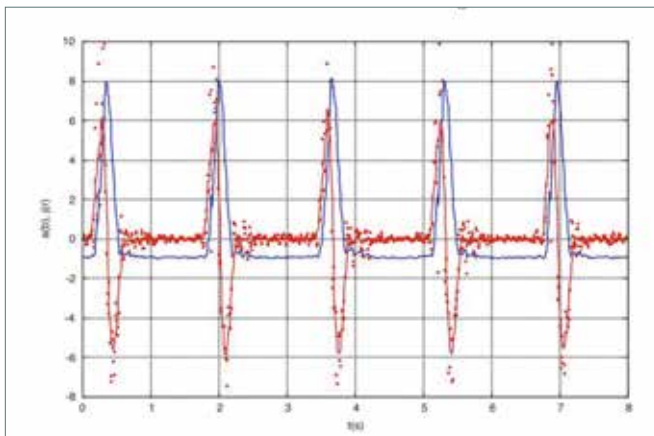


Figuur 3 De clothoïde en de overgangsboog

Ook bij het ontwerp van rollercoasters en zelfs van hondenrenbanen kan het gebruik van de clothoïde voorkomen dat er ongelukken gebeuren.

6. TRAMPOLINESPRINGEN

Bij trampolinespringen heb je een combinatie van vrije val en een harmonische trilling. De maximale opwaartse kracht van de trampoline op het lichaam met massa m is Nmg , met een maximale versnelling van $(N - 1)g$. Hierbij is N een parameter die varieert per sprong. Als de voeten in contact zijn met de springmat, neemt de versnelling sinusoidaal toe: als de springer de evenwichtspositie passeert, is de versnelling 0 en de kracht van de mat is mg , de zwaartekracht compenserend. Voor het deel van de sprong waar de springer in de lucht hangt, is de versnelling constant gelijk aan $-g$ en zijn de jerk en de hogere afgeleiden 0. Als de springer in contact is met de trampoline, is de jerk een cosinusfunctie, en bij elke volgende afgeleide verandert de sinus in cosinus of de cosinus in een negatieve sinus. De jerk is 0 als de versnelling maximaal is. Als de versnelling de nulwaarde passeert, is de jerk maximaal als de springer bezig is aan de neerwaartse beweging en minimaal als de springer bezig is aan zijn opwaartse beweging.



Figuur 4 Versnelling en jerk bij trampolinespringen

In figuur 4 zie je de resultaten van versnellingsmetingen met een accelerometer en de jerk gedurende 5 opeenvolgende sprongen op een trampoline. (Op de meeste tablets en smartphones kun je een app downloaden die de versnellingen meet in drie dimensies.) Merk op dat de versnelling (blauwe kromme) $-g$ is als de springer in de lucht is en maximaal is als de mat in haar diepste dood punt is (waar de snelheid 0 is en van zin verandert). De rode punten tonen de ruwe jerkgegevens. Er is ook een functiegrafiek getekend die de grote schommelingen van de gegevens wat uitmiddelt.

We zien in de jerkgrafiek (rood) twee extreme waarden per sprong: een maximum onmiddellijk nadat de voeten contact maken met de mat en een minimum als de voeten de mat lossen.

Jerk is iets waar we dagelijks mee te maken hebben, maar het wordt bij mijn weten nergens besproken in het secundair onderwijs. Deze toepassingen zijn nochtans niet zo ingewikkeld om te begrijpen. Het is ook een mooi en haalbaar onderwerp voor verder onderzoek door leerlingen.

BRONNEN

- Eager, D., Pendrill, A.-M., Reistad, N. (2016). Beyond velocity and acceleration: jerk, snap and higher derivatives. *European Journal of Physics* 37. Online beschikbaar: <http://iopscience.iop.org/0143-0807/37/6/065008>
- Lauwers, F. (2013). Een model voor een lift. *Leergang wiskunde*. Online beschikbaar: www.leergangwiskunde.nl/docs/lesmateriaal/Een%20model%20voor%20een%20lift-1.pdf
- Schot, S.H. (1978). Jerk: The time rate of change of acceleration. *American Journal of Physics* 46. Online beschikbaar: <http://scitation.aip.org/content/aapt/journal/ajp/46/11/10.1119/1.11504>
- Schot, S.H. (1978a). Aberrancy: Geometry of the Third Derivative. *Mathematics Magazine* 51/5, 259-275. Online beschikbaar: www.jstor.org/stable/2690245
- <http://math.stackexchange.com/questions/14841/what-is-the-meaning-of-the-third-derivative-of-a-function-at-a-point>

Dit artikel verscheen in het tijdschrift *Uitwiskeling* (jaargang 33 nummer 2). *Uitwiskeling* is een tijdschrift van en voor wiskundeleraren, helemaal vanuit de praktijk van het wiskundeonderwijs. Benieuwd naar meer? Op de webstek www.uitwiskeling.be vind je alle info.